UEBER DIE PRINCIPIEN DER GALILEI-NEWTON'SCHEN THEORIE.

AKADEMISCHE ANTRITTSVORLESUNG

GEHALTEN

IN DER AULA DER UNIVERSITÄT LEIPZIG

AM 3. NOVEMBER 1869.

VON

DR. C. NEUMANN,

ORD. PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT LEIPZIG. MITGLIED DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN UND DER KÖNIGLICHEN SOCIETÄT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN. CORRESP. MITGLIED DES KÖNIGLICHEN LOMBARDISCHEN INSTITUTS DER WISSENSCHAFTEN ZU MAILAND.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1870.

UEBER DIE PRINCIPIEN

DER

GALILEI-NEWTON'SCHEN THEORIE.

AKADEMISCHE ANTRITTSVORLESUNG

GEHALTEN

IN DER AULA DER UNIVERSITÄT LEIPZIG

AM 3. NOVEMBER 1869.

VON

Dr. C. NEUMANN,

ORD. PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT LEIPZIG, MITGLIED DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN UND DER KÖNIGLICHEN SOCIETÄT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN, CORRESP. MITGLIED DES KÖNIGLICHEN LOMBARDISCHEN INSTITUTS DER WISSENSCHAFTEN ZU MAILAND.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1870.



Vorwort.

Wenn das eigentliche Ziel der mathematischen Naturwissenschaft, wie allgemein anerkannt werden dürfte, darin besteht, möglichst wenige (übrigens nicht weiter erklärbare) Principien zu entdecken, aus denen die allgemeinen Gesetze der empirisch gegebenen Thatsachen mit mathematischer Nothwendigkeit emporsteigen, also Principien zu entdecken, welche den empirischen Thatsachen *aequivalent* sind, — so muss es als eine Aufgabe von unabweisbarer Wichtigkeit erscheinen, diejenigen Principien, welche in irgend einem Gebiet der Naturwissenschaft bereits mit einiger Sicherheit zu Tage getreten sind, in sorgfältiger Weise zu durchdenken, und den Inhalt dieser Principien womöglich in solcher Form darzulegen, dass jener Anforderung der Aequivalenz mit den betreffenden empirischen Thatsachen wirklich entsprochen werde.

In der vorliegenden Exposition ist Derartiges versucht worden mit Bezug auf die Principien der theoretischen Mechanik. Einer sorgfältigen Analyse ist namentlich das *Galilei'sche Trägheitsprincip* unterworfen und gezeigt worden, dass dieses Princip nicht als *ein einziges* Princip acceptirt werden dürfe, sondern bei genauerer Betrachtung aufgelöst werden müsse in eine *grössere Anzahl* theils fundamentaler Principien, theils

sich anlehnender Definitionen. Zu letztern gehört die Definition von *Ruhe und Bewegung*, und ebenso auch die Definition *gleich langer Zeitabschnitte*.

Eine ähnliche Analyse in Betreff des *Newton'schen Anziehungsprincipes* ist in Kürze angedeutet, jedoch nicht näher durchgeführt worden, um der Exposition denjenigen einheitlichen Charakter bewahren zu können, welcher bei einer öffentlichen Vorlesung geboten war.

Leipzig, 2. December 1869.

C. Neumann.

Hochgeehrte Versammlung!

Trotz vielfältiger Bemühungen sind uns zwei Gegenden unserer Erdoberfläche immer noch unbekannt, die Gegend des Nordpols und die des Südpols. Einige Nordpolfahrer haben berichtet, dass sie zu ihrer Verwunderung hoch oben im Norden ein offenes Meer erblickt hätten, frei vom Eise. Sie haben (wenn ich nicht irre) die Vermuthung ausgesprochen, dass dieses offene Meer den Nordpol rings umgebe, dass es sich nur darum handele, bis zu diesem Meere vorzudringen. Habe man dasselbe erst erreicht, so werde dann die weitere Fahrt bis zum Pole ebenso leicht von Statten gehen, wie etwa eine Fahrt im Mittelländischen Meer.

Nehmen wir an, ein Nordpolfahrer erzähle uns von jenem räthselhaften Meer. Es wäre ihm geglückt in dasselbe einzudringen, und es habe sich ihm dort ein merkwürdiges Schauspiel dargeboten. Mitten im Meer habe er zwei schwimmende Eisberge erblickt, ziemlich weit von einander entfernt, einen grösseren und einen kleineren. Aus dem Innern des grossen Berges sei eine Stimme ertönt, welche in befehlendem Ton gerufen habe: „Zehn Fuss näher!“ und sofort habe der kleine Eisberg dem Befehl Folge geleistet, und sei zehn Fuss näher an den grossen herangerückt. Und wiederum habe der grössere commandirt: „Sechs Fuss näher!“ Sofort habe der andere den Befehl wieder ausgeführt. Und so wäre Befehl auf Befehl erschallt, und der kleine Eisberg in fort-

währender Bewegung gewesen, eifrig bemüht, jeden Befehl augenblicklich und auf das Genaueste auszuführen.

Sicherlich würden wir einen solchen Bericht in das Reich der Fabeln verweisen. Doch spotten wir nicht zu früh! Die Vorstellungen, die uns hier sonderbar erscheinen; es sind dieselben, welche dem vollendetsten Theil der Naturwissenschaft zu Grunde liegen, es sind dieselben, denen der Berühmteste unter den Naturforschern den Ruhm seines Namens verdankt.

Denn im Weltraum erschallen fortwährend solche Befehle, ausgehend von den einzelnen Himmelskörpern, von Sonne, Planeten, Monden und Kometen. Jeder einzelne Weltkörper lauscht auf die Befehle, welche die übrigen Körper ihm zurufen, fortwährend bemüht, diese Befehle aufs Pünktlichste auszuführen. In geradliniger Bahn würde unsere Erde durch den Weltraum dahinstürzen, wenn sie nicht gelenkt und geleitet würde durch den von Augenblick zu Augenblick von der Sonne her ertönenden Commandoruf, dem die Befehle der übrigen Weltkörper, weniger vernehmlich, sich beimischen.

Allerdings werden diese Befehle ebenso *schweigend* gegeben, wie sie *schweigend* vollzogen werden. Auch hat Newton dieses wechselseitige Spiel von Befehl und Folgeleistung mit einen andern Namen bezeichnet. Er spricht kurzweg von der gegenseitigen Einwirkung, von der gegenseitigen Anziehungskraft, welche zwischen den Weltkörpern stattfindet. Die Sache aber ist dieselbe. Denn diese gegenseitige Einwirkung besteht darin, dass der eine Körper Befehle ertheilt, und der andere dieselben befolgt.

War es denn aber nöthig, so höchst sonderbare Vorstellungen sich zu bilden zur Erklärung der Astronomischen Erscheinungen? Nöthig vielleicht nicht! Aber viele Jahrhunderte haben *vor* Newton, und zwei Jahrhunderte *nach* ihm an der Aufgabe gearbeitet. Mancherlei ist erdacht worden, um die Bewegung der Himmelskörper zu erklären, bald

ein unsichtbares System von Stangen und Balken, bald ein beständiger Wirbel von unsichtbarer Materie, bald ein Chaos sich bunt durchkreuzender Ströme. Und Alles ist unbrauchbar gewesen. Newtons Gedanken *allein* haben sich bewährt. — Sie haben sich *glänzend* bewährt, hingeleitet zur Entdeckung neuer, zum Theil unsichtbarer Himmelskörper.

Im Jahre 1840 richteten die Astronomen ihre Aufmerksamkeit auf die Bewegung des Uranus, und bemerkten, dass dieser Planet nicht allein von der Sonne und den übrigen Planeten seine Befehle erhalte, sondern ausserdem noch *andere* Befehle von völlig räthselhaftem Ursprung. Sie achteten genau auf die Richtung, aus welcher diese räthselhaften Befehle ertönten, in der Vermuthung, dass in dieser Richtung ein noch unbekannt gebliebener Himmelskörper sich befinden möchte. Manche Mühe und Arbeit, ein Zeitraum von 6 Jahren war erforderlich, um jene Richtung mit voller Genauigkeit zu bestimmen. Als aber im sechsten Jahr die Richtung ermittelt war, und das Fernrohr *in* diese Richtung versetzt wurde, erblickte man den lange geahnten (mit blossem Auge nicht sichtbaren) neuen Himmelskörper, den Planeten Neptun.

Aehnliches und noch Merkwürdigeres ist über einen der Fixsterne, über den glänzenden Sirius zu berichten. Eine eigenthümliche, etwa kreisförmige Bewegung dieses Sternes erweckte schon vor 33 Jahren den Verdacht, dass er den Befehlen eines in der Nähe befindlichen Weltkörpers gehorche. Aber, obwohl man die Richtung, aus welcher diese Befehle zu kommen schienen, genau ermittelt hatte, war es dennoch (selbst bei Anwendung der vorzüglichsten Fernröhre) nicht möglich, in dieser Richtung einen Weltkörper wahrzunehmen.

Doch die Ueberzeugung, dass in dieser Richtung ein Weltkörper sich befinde, konnte durch seine Unsichtbarkeit nicht erschüttert werden. Man hielt fest an jener Ueberzeugung, und nannte jenen Weltkörper kurzweg den unsichtbaren Begleiter des Sirius. Wahrscheinlich in Folge der allmähligen Vervollkommnung unserer optischen Instrumente,

ist dieser unsichtbare Begleiter vor einigen Jahren (1862) sichtbar geworden, jeder weitere Zweifel über seine Existenz beseitigt. Seine Entdeckung aber geschah (wie gesagt) zu einer Zeit, wo er noch *nicht* sichtbar war, geschah durch aufmerksame Untersuchung der eigenthümlichen Bewegung, welche der unter seiner Botmässigkeit stehende Sirius darbietet.

Newton's Gedanke von einer gegenseitigen Einwirkung, einer gegenseitigen Anziehungskraft der Himmelskörper hat sich mit der Zeit so eingebürgert, dass *wir* kaum noch etwas Befremdliches darin erblicken. Und doch besteht dieser Gedanke im Wesentlichen darin, dass die Himmelskörper einander von Augenblick zu Augenblick ihre Befehle zurufen, und dass jeder einzelne Körper die ihm gewordenen Befehle augenblicklich und in pünktlichster Weise ausführt. — Wie tief dieser Gedanke aber einschnitt in die Vorstellungen von *Newton's Zeitgenossen*, das erkennen wir, wenn wir einen Blick werfen auf die Briefe von Huygens, eines Mannes, der auf der Höhe seiner Zeit stand, selber grossartige Entdeckungen gemacht hat, und die Gedanken und Entdeckungen Anderer wohl zu würdigen im Stande war. „Der Newton'sche Gedanke einer gegenseitigen Anziehung — heisst es in seinen Briefen an Leibniz — scheint mir *absurd*. Ich wundere mich nur, dass ein Mann wie Newton so viele mühsamen Untersuchungen und Rechnungen anstellen konnte, welche kein besseres Fundament haben als einen *solchen* Gedanken.“ [1])

Die Newton'schen Hypothesen standen völlig heterogen, standen fast diametral gegenüber denjenigen Vorstellungen, an welche man sich damals gewöhnt hatte. Deswegen wurden sie von Huygens mit Misstrauen betrachtet, für *unwahrscheinlich* und *absurd* erklärt. — Darf man denn aber eine physikalische Hypothese unmittelbar nach ihrem *Inhalt* beurtheilen, darf man sie, je nach ihrem *Inhalt*, für wahrscheinlich oder unwahrscheinlich erklären! Hatte man nicht, und zwar schon lange Zeit vor Newton und Huygens,

mit vollem Recht gesagt: Non necesse est, hypotheses esse veras vel verosimiles; sufficit hoc unum, si calculum observationibus congruentem exhibeant[2]).

Um die Bedeutung eines solchen Ausspruchs zu würdigen, um sein volles Gewicht zu erkennen, mögen mir einige allgemeine Bemerkungen gestattet sein über das Wesen und die Aufgabe der physikalischen Wissenschaft.

Man wird gewöhnlich sagen, der Physiher habe die Aufgabe, die Naturerscheinungen zu *erklären.* Doch bedarf dieser Ausspruch — so einfach und selbstverständlich derselbe auf den ersten Blick auch erscheinen mag — doch wohl noch einer näheren Erörterung.

Nehmen wir z. B. eine möglichst einfache Naturerscheinung, betrachten wir die Bewegung eines Steines, welcher in beliebiger Richtung in die Höhe geschleudert ist, und nun eine Zeit lang emporsteigt, dann zu sinken beginnt, tiefer und tiefer sinkt, bis er schliesslich die Erde wieder erreicht. Wie erklärt man die bei dieser Erscheinung beobachteten Umstände? Wie erklärt man z. B., dass die von einem solchen Stein beschriebene Curve eine Parabel ist?

Wenn wir die Erklärung, welche der Physiker hierfür giebt, mit einiger Genauigkeit analysiren, so finden wir, dass dieselbe auf zwei Vorstellungen beruht, nämlich erstens auf der Vorstellung von der *Trägheit* aller Körper, und zweitens auf der Vorstellung von der *Anziehung* der Erde.

Wäre die *Anziehungskraft* der Erde nicht vorhanden, würde der emporgeschleuderte Stein also nur von seiner Trägheit beherrscht, so würde er die Richtung, in welcher er zu Anfang emporgeschleudert wurde, ins Unendliche hin behalten; er würde also dann eine geradlinige Bahn verfolgen, und in dieser Bahn mit constanter Geschwindigkeit fortgehen.

Wäre andererseits die *Trägheit* der Materie nicht vorhanden, würde der Stein also nur von der Anziehungskraft der Erde beherrscht, so würde der Stoss, durch welchen er zu Anfang emporgeschleudert wurde, auf seine Bewegung ohne allen Einfluss bleiben. Nach dem Aufhören jenes Stosses würde auch sofort jede Wirkung desselben erloschen sein. Der Stein würde sich daher, sobald der Stoss aufgehört hat, einen Augenblick in vollständiger Ruhe befinden, und sodann, weil die Anziehung der Erde auf ihn einwirkt, auf kürzestem Wege zur Erde hinbewegen.

Nun sind aber — wird der Physiker fortfahren — *beide* Ursachen vorhanden. Die *Trägheit* ist vorhanden, und gleichzeitig auch die *Anziehung* der Erde. In Folge des Zusammenwirkens *beider* Ursachen entsteht diejenige Bewegung, bei welcher der Stein eine parabolisch gekrümmte Bahn durchläuft.

Wie erklären sich nun aber — werden wir weiter fragen — jene beiden hier ins Spiel kommenden Ursachen? Woher kommt es, dass die Körper *träge* sind? Und woher kommt es, dass die Körper von der Erde *angezogen* werden? — Auf diese Fragen giebt die physikalische Wissenschaft *keine* Antwort. Die Trägheit der Körper und die anziehende Wirkung der Erde sind bei ihr Grundvorstellungen, — sind bei ihr Dinge, die nicht weiter erklärbar, die völlig unbegreiflich sind.

Also die Sache, welche ursprünglich zur Erklärung vorgelegt war, die Bewegung des emporgeschleuderten Steines wird zurückgeführt auf die Existenz zweier anderer Dinge, auf die Trägheit und auf die Erd-Anziehung; und diese beiden andern Dinge bleiben *unerklärt!* Scheint es doch, als wenn dadurch wenig Vortheil erwüchse! Welchen Nutzen hat es denn, wenn wir nun an Stelle der zu erklärenden Sache selber zwei andere Sachen haben, die ebenfalls der Erklärung bedürftig sind!

Wir haben hier einen Umstand übersehen. Wir können den Stein mit *beliebiger* Geschwindigkeit und in *beliebiger* Richtung emporwerfen. Geben wir ihm eine etwas *andere*

Geschwindigkeit oder eine etwas *andere* Richtung, so erhalten wir auch jedesmal eine etwas *andere* Art seiner Bewegung; eine etwas *andere* Curve für die von ihm durchlaufene Bahn.

Wir haben es hier also nicht mit *einer einzigen* Erscheinung, sondern mit *unendlich vielen* Erscheinungen zu thun. All' diese *unendlich vielen* Erscheinungen lassen sich zurückführen auf die beiden vorhin angegebenen Grundvorstellungen. Und es wird also durch jene Zurückführung die Anzahl der *unerklärbaren* Dinge vermindert, sehr erheblich vermindert. Denn an Stelle jener *unendlich vielen* Erscheinungen, um deren Erklärung es sich handelt, haben wir jetzt nur *zwei* unerklärbare Dinge, die Trägheit der Materie, und die Anziehungskraft der Erde[3]).

Ganz ähnliches ist zu sagen in Bezug auf das *Newton'sche Gesetz*, überhaupt in Bezug auf die *Newton'sche Theorie*. Newton hat, wenn wir uns strenge ausdrücken wollen, die Bewegungen der Himmelskörper *keineswegs* erklärt. Newton hat aber durch seine Theorie die unendliche Mannigfaltigkeit, welche in diesen Bewegungen sich darbietet, zurückgeführt auf nur *zwei* unerklärt bleibende Dinge, nämlich zurückgeführt auf die *Trägheit* der Himmelskörper und auf eine zwischen ihnen stattfindende *Anziehung*.

Ebenso wie die Geometrische Wissenschaft, die Theorie der Dreiecke, der Kreise, der Kegelschnitte in streng mathematischer Weise emporgewachsen ist aus wenigen Grundsätzen, aus wenigen Axiomen, die ihrerseits nicht weiter erklärbar, nicht weiter demonstrabel sind; ebenso oder wenigstens ähnlich verhält es sich auch mit jener Theorie, welche Newton für die Bewegung der Himmelskörper aufgestellt hat. Sie kann Schritt vor Schritt in streng mathematischer Weise deducirt werden aus jenen beiden Grundvorstellungen der *Trägheit* und *Anziehung*, d. i. aus zwei Principien, die ihrerseits nicht weiter erklärlich sind.

Ist es nicht aber als ein Fehler, als ein Mangel dieser

Theorie zu bezeichnen, dass ihre Grundvorstellungen so völlig unbegreiflicher Natur sind! Immerhin mag man diesen Umstand als einen Mangel ansehen. Nur dürfte es ausserhalb der menschlichen Fähigkeiten liegen, denselben zu beseitigen. Denn wollten wir eine physikalische Theorie nicht von irgend welchen unbegreiflichen und hypothetischen Grundvorstellungen, sondern von Sätzen ausgehen lassen, die den Stempel *unumstösslicher Sicherheit* an sich tragen, die durch sich selber die Bürgschaft *unangreifbarer Wahrheit* bieten, so würden wir gezwungen sein, zu den Sätzen der Logik oder Mathematik unsere Zuflucht zu nehmen. Aus derartigen rein formalen Sätzen eine physikalische Theorie deduciren zu wollen, würde aber ein Ding der Unmöglichkeit sein. — Ebenso wenig etwa wie ein Techniker aus all seinen Kenntnissen und Fähigkeiten heraus eine Eisenbahn erbauen kann, wenn ihm das dazu erforderliche Material fehlt, ebenso wenig wird man, aus einem rein formalen Satz, wie etwa $2 \cdot 2 = 4$, eine physikalische Theorie zu deduciren, jemals im Stande sein. Ex nihilo nil fit.

Bis zu welcher Höhe und Vollendung unsere physikalischen Theorien im Laufe der Jahrhunderte und Jahrtausende auch emporsteigen mögen, immer werden diese Theorien von Principien, von Hypothesen ausgehen müssen, die (an und für sich betrachtet) als *unbegreiflich*, als *willkührlich* zu bezeichnen sind.

Somit werden wir jenen Worten: Non necesse est, hypotheses esse veras vel verosimiles; sufficit hoc unum si calculum observationibus congruentem exhibeant — unsere Beistimmung nicht weiter versagen können. Ja noch mehr! Wir werden einräumen müssen, dass bei jenen Principien oder Hypothesen, eben *weil* sie unbegreiflich, *weil* sie willkührlich sind, von einer Richtigkeit oder Unrichtigkeit, von einer Wahrscheinlichkeit oder Unwahrscheinlichkeit gar nicht die Rede sein kann.

Allerdings, — wir werden das Wort *wahrscheinlich*, und

ebenso das Wort *wahr* zuweilen anwenden können als ein Epitheton ornans, — wir werden z. B. sagen: Thomas Young und Fresnel hätten bei ihren Untersuchungen über die Erscheinungen des Lichtes die *wahren* Principien zu ihrem Ausgangspunkt gewählt. Damit aber werden wir doch immer nur behaupten wollen, dass jene Principien bis zum heutigen Tag sich am Besten bewährt haben; nicht aber, dass sie für alle Ewigkeit feststehen; und noch viel weniger, dass sie (gleich einem Satz der Logik oder Mathematik) durch sich selber die Bürgschaft unangreifbarer Festigkeit; die Bürgschaft unumstösslicher Wahrheit darbieten.

Im *strengen* Sinne genommen, werden die Principien, die Ausgangspunkte einer physikalischen Theorie *niemals* als wahr oder wahrscheinlich bezeichnet werden dürfen; — sondern sie werden (mit Bezug auf unser Denkvermögen, mit Bezug auf unsern menschlichen Verstand) immer als etwas *Willkührliches* und *Unbegreifliches* zu bezeichnen sein. Spricht sich in solchem Sinne doch auch Leibniz aus: Er leugne nicht, dass die Naturerscheinungen aus einmal festgestellten Principien mathematisch und mechanisch erklärt werden müssten, aber *diese Principien selber* seien *nicht* weiter abzuleiten aus den Gesetzen mathematischer Nothwendigkeit[1]). — Und wenn wir vorhin sagten, der Physiker habe die Aufgabe, die Erscheinungen, welche sich in der Natur darbieten, zu *erklären*, so werden wir uns gegenwärtig in dieser Beziehung genauer ausdrücken müssen, indem wir sagen, er habe die Aufgabe, jene Erscheinungen zurückzuführen auf möglichst wenige *willkührlich* zu wählende Principien, mit andern Worten, sie zurückzuführen auf möglichst wenige *unbegreiflich* bleibende Dinge. Je grösser die Anzahl von Erscheinungen ist, welche von einer physikalischen Theorie umfasst werden, und je kleiner gleichzeitig die Anzahl der unerklärbaren Dinge ist, auf welche die Erscheinungen zurückgeführt sind, um so vollkommener wird die Theorie zu nennen sein.

Die Principien der Galilei-Newton'schen Theorien bestehen in zwei Gesetzen, in dem schon von Galilei ausgesprochenen Trägheitsgesetz, und in dem später von Newton hinzugefügten Anziehungsgesetz. — Und wenn wir nun auch auf eine *Erklärung* dieser Grundvorstellungen Verzicht leisten müssen, — um so unerbittlicher werden wir verlangen, dass uns wenigstens eine deutliche Darlegung ihres Inhalts zu Theil werde; — aber auch *hiebei* werden mancherlei Schwierigkeiten uns entgegentreten; sie werden uns zwingen, jene Gesetze zu zerlegen in eine grössere Anzahl *einheitlicher* Grundvorstellungen, sie aufzulösen in eine grössere Anzahl *fundamentaler* Principien.

Ein in Bewegung gesetzter materieller Punkt läuft, falls keine fremde Ursache auf ihn einwirkt, falls er vollständig sich selber überlassen ist, in *gerader Linie* fort, und legt in gleichen Zeiten *gleiche Wegabschnitte* zurück. — So lautet das von Galilei ausgesprochene Trägheitsgesetz.

In dieser Fassung kann der Satz als *Grundstein* eines wissenschaftlichen Gebäudes, als *Ausgangspunkt* mathematischer Deductionen unmöglich stehen bleiben. Denn er ist vollständig *unverständlich*. Wir wissen ja nicht, was unter einer Bewegung *in gerader Linie* zu verstehen ist; oder wir wissen vielmehr, dass diese Worte in sehr verschiedenartiger Weise interpretirt werden können, unendlich vieler Bedeutungen fähig sind.

Denn eine Bewegung z. B., welche von unserer Erde aus betrachtet, *geradlinig* ist, wird von der Sonne aus betrachtet *krummlinig* erscheinen, — und wird, wenn wir unsern Standpunkt auf den Jupiter, auf den Saturn, auf andere Himmelskörper verlegen, jedesmal durch eine *andere* krumme Linie repräsentirt sein[5]). Kurz! Jede Bewegung, welche mit Bezug auf *einen* Himmelskörper *geradlinig* ist, wird mit Bezug auf jeden *andern* Himmelskörper *krummlinig* erscheinen.

Jene Worte des Galilei, dass ein sich selber überlassener materieller Punkt in *gerader Linie* dahingeht, treten uns

also entgegen als ein Satz ohne Inhalt, als ein in der Luft schwebender Satz, der (um verständlich zu sein) noch eines bestimmten Hintergrunds bedarf. Irgend ein specieller Körper im Weltall muss uns gegeben sein, als Basis unserer Beurtheilung, als derjenige Gegenstand, mit Bezug auf welchen alle Bewegungen zu taxiren sind, — nur dann erst werden wir mit jenen Worten einen bestimmten Inhalt zu verbinden im Stande sein. Welcher Körper ist es nun, dem wir diese bevorzugte Stellung einräumen sollen? Oder sind vielleicht *verschiedene* Körper anzuführen? Sind vielleicht die Bewegungen in der Nähe unserer Erde auf die Erdkugel, die Bewegungen in der Nähe der Sonne auf den Sonnenball zu beziehen?

Leider erhalten wir auf diese Fragen weder bei Galilei noch bei Newton eine bestimmte Antwort. Wenn wir aber das von ihnen begründete und bis auf die heutige Zeit mehr und mehr erweiterte theoretische Gebäude aufmerksam durchmustern, so können uns seine Fundamente nicht länger verborgen bleiben. Wir erkennen alsdann leicht, dass sämmtliche im Universum vorhandene oder überhaupt denkbare Bewegungen zu beziehen sind auf *ein und denselben* Körper. *Wo* dieser Körper sich befindet, welche Gründe vorhanden sind, einem einzigen Körper eine so hervorragende, gleichsam souveräne Stellung einzuräumen, — hierauf allerdings erhalten wir *keine* Antwort.

Als *erstes Princip* der Galilei-Newton'schen Theorie würde daher der Satz hinzustellen sein, dass an irgend einer unbekannten Stelle des Weltraumes ein unbekannter Körper vorhanden ist, und zwar ein *absolut starrer* Körper, ein Körper, dessen Figur und Dimensionen für alle Zeiten unveränderlich sind.

Es mag mir gestattet sein, diesen Körper kurzweg zu bezeichnen als den Körper *Alpha*. Hinzuzufügen würde sodann sein, dass unter der *Bewegung* eines Punktes nicht etwa seine Ortsveränderung in Bezug auf Erde oder Sonne,

sondern seine Ortsveränderung in Bezug auf jenen Körper Alpha zu verstehen ist.[6])

Von hier aus betrachtet, gewinnt nun das Galilei'sche Gesetz seinen deutlich erkennbaren Inhalt. Es präsentirt sich uns als ein

zweites Princip, darin bestehend, dass ein sich selbst überlassener materieller Punkt in gerader Linie fortschreitet, also in einer Bahn dahingeht, die geradlinig ist in Bezug auf jenen Körper Alpha.

Doch wir haben bisher erst einen *Theil* des Galileischen Gesetzes in Betracht gezogen. Jenes Gesetz sagt noch mehr, es behauptet, dass ein sich selbst überlassener Punkt nicht nur in gerader Linie, sondern auch mit *constanter Geschwindigkeit* fortschreite, dass er also in gleichen Zeitintervallen gleich grosse Wegabschnitte zurücklege. Sollen diese Worte verständlich sein, so müssen wir zunächst wissen, was unter *gleich grossen Zeitintervallen* zu verstehen ist, also wissen, in welcher Weise eine gegebene Zeitlänge zu beurtheilen, zu taxiren, zu messen ist.

Wir sind gewohnt, die Umdrehungszeit unserer Erdkugel als unsere Zeiteinheit zu betrachten; wir wissen die Zeit kaum anders zu messen, als indem wir denjenigen Zeitraum, welcher zwischen zwei aufeinander folgenden Culminationen eines Sternes verstreicht, zur Einheit wählen. Diese Zeiteinheit, den sogenannten Sterntag, zerlegen wir dann in 24 Stunden, die Stunde in 60 Minuten, die Minute in 60 Secunden. In solcher Weise reguliren wir die astronomischen Uhren; und von diesen abhängig sind unsere gewöhnlichen Uhren.

Durch die aufeinanderfolgenden Umdrehungen der Erdkugel entsteht also in der fortschreitenden Zeit eine Scala, deren grössere Abschnitte als Sterntage, und deren kleinere Abschnitte als Stunden, Minuten, Secunden bezeichnet werden. Haben wir nun wirklich *diese Scala* als eine *völlig correcte* zu betrachten, haben wir wirklich zwei entsprechende Abschnitte derselben als *genau* einander gleich, zwei Sterntage z. B. als

genau gleich lange Zeitintervalle anzusehen? Sollten wir wirklich diese von unserer winzigen Erdkugel dictirte Zeitscala als gültig anzusehen haben bei unseren Betrachtungen über das Universum! Haben nicht alle andern Himmelskörper gleichen Anspruch auf eine solche Bevorzugung! Oder sollen wir etwa annehmen, dass sämmtliche Himmelskörper in ihren Rotationsbewegungen mit einander harmoniren, und übereinstimmende Scalen liefern, der Art, dass gleiche Abschnitte der einen Scala stets mit gleichen Abschnitten einer jeder anderen correspondiren!

An und für sich schon dürfte es keinem Zweifel unterliegen, in welcher Weise diese Fragen zu beantworten sind. Und die letzte Spur einer Unschlüssigkeit muss verschwinden, wenn wir uns daran erinnern, dass einige Astronomen unserer Zeit zu dem Resultat gelangt sind, dass die Rotationsbewegung der Erdkugel allmählig langsamer und langsamer werde, dass also die sogenannten Sterntage *nicht* durchweg von gleicher Länge sind, sondern allmählig grösser und grösser werden. Sie haben gefunden, dass in jedem Jahrtausend der *letzte* Sterntag etwa um ein tausendtel Secunde grösser ist, als der *erste*.

Allerdings soll es zweifelhaft sein, ob die Rechnungen, durch welche jene Astronomen zu diesem Resultat gelangt sind, die hinreichende Sicherheit besitzen, andrerseits auch, ob die den Rechnungen zu Grunde gelegten empirischen Data die für so difficile Dinge erforderliche Zuverlässigkeit darbieten. Bedenken wir aber, das die Bewegung von Ebbe und Fluth, dass ferner jedes Sinken und Steigen der Temperatur auf die Rotationsbewegung der Erdkugel von Einfluss sein muss, so können wir keinen Augenblick daran zweifeln, dass die theoretische Astronomie zu solchen Resultaten dereinst mit voller Sicherheit gelangen wird, dass sie dereinst mit voller Bestimmtheit anzugeben im Stande sein wird, um *wie viel* die Umdrehungszeit der Erde innerhalb eines Jahrtausends ab- oder zunimmt.

Absurd also würde es sein, wenn wir sagen wollten:

Zwei gegebene Zeitintervalle sind gleich lang, sobald beide gleich viel Sterntage, oder gleich viel Sternsecunden umfassen; und wir kommen auf diese Weise, mit Bezug auf jenen Satz des Galilei, in eine eigenthümliche Verlegenheit.

Ein sich selbst überlassener materieller Punkt durchläuft in gleichen Zeitintervallen gleich grosse Wegabschnitte. So lauten die Worte jenes Gesetzes. Und es scheint unmöglich, mit diesen Worten einen bestimmten Inhalt zu verbinden, so lange wir nicht wissen, was unter gleichen Zeitlängen zu verstehen ist.

Aber nur scheinbar! Denn wenn wir jenen Stein des Anstosses bei Seite werfen, jenen irrationalen Begriff der gleich grossen Zeitintervalle abscheiden, so bleibt von dem Satze immerhin noch ein bestimmtes Residuum übrig, welches so lautet:

Zwei materielle Punkte, von denen jeder sich selbst überlassen ist, bewegen sich in solcher Weise fort, dass gleiche Wegabschnitte des einen immer mit gleichen Wegabschnitten des andern correspondiren.

In dieser Form und Beschränkung repräsentirt der Satz ein *drittes Princip* der Galilei-Newton'schen Theorie, ein Princip, dessen Inhalt eben so deutlich zu Tage liegt, wie derjenige der beiden erstgenannten.

Aehnlich wie früher dem Princip des Körpers Alpha eine gewisse Begriffsbestimmung, die Definition der *Bewegung* sich anlehnte; in ähnlicher Weise tritt uns nun auch gegenwärtig eine wichtige Definition entgegen, in unmittelbarer Verbindung mit dem letztgenannten Princip. In Uebereinstimmung mit dem Geiste Galilei's und Newton's, in Uebereinstimmung mit der ganzen Entwicklung der von ihnen begründeten Theorie, können wir nämlich jetzt (nachdem das dritte Princip in der angegebenen Weise festgestellt ist) *gleiche Zeitintervalle* als diejenigen definiren, innerhalb welcher ein sich selbst überlassener Punkt gleiche Wegabschnitte zurücklegt. — Von hier aus betrachtet erhalten wir Aufschluss über den

eigentlichen Inhalt der von den Astronomen ausgesprochenen Behauptung, dass in jedem Jahrtausend der letzte Tag etwas länger sei als der erste; wir sehen: ihr Inhalt besteht darin, dass ein sich selbst überlassener Punkt in jenem letzten Tage einen etwas grösseren Weg zurücklegen würde, als im ersten.

Nachdem wir in solcher Weise eine deutliche Vorstellung erhalten haben über das Galilei'sche Trägheitsgesetz, können wir nun unmittelbar übergehen zu dem Newton'schen Anziehungsgesetz.

Mit Bezug auf irgend ein System materieller Punkte würde dasselbe (der Hauptsache nach) dahin auszusprechen sein, dass jeder dieser Punkte in jedem Augenblick einen Befehl zur Beschleunigung, zur Steigerung seiner Geschwindigkeit erhält, dass dieser Befehl ausgeht von den übrigen Punkten, und dass sein Inhalt in bestimmter Weise abhängig ist von der augenblicklichen Gruppirung, von der augenblicklichen Configuration der Punkte.

Auch dieses Gesetz[7]) würde aufzulösen sein in eine gewisse Anzahl fundamentaler Principien. — Wollten wir indessen hierauf genauer eingehen, so würden wir ein weitgedehntes, übrigens plan daliegendes Gebiet zu durchwandern haben. Begegnen würden uns dabei die sogenannten Impulse und Kräfte, die Eigenschaften dieser Kräfte, die Regeln über ihre Zusammensetzung und Zerlegung — lauter Dinge, die (an und für sich betrachtet) nichts *Wesentliches* enthalten, sondern nur als Worte, als Abkürzungen anzusehen sind, dazu bestimmt, um die Durchwanderung jenes Gebietes (durch Einführung geeigneter Zwischenstationen) ein wenig bequemer zu machen. In dem ganzen plan daliegenden Gebiet würde nur noch ein einziger Höhenpunkt, eine einzige begriffliche Schwierigkeit zu überwinden sein, nämlich der Begriff der sogenannten *Masse.* Aber es würde zu weit führen, wenn wir auf diese Dinge uns weiter einlassen wollten.

Wichtiger erscheint es, noch einige Bemerkungen hinzuzufügen über die schon genannten Principien, namentlich in Bezug auf das in *erste Linie* gestellte Princip, dass irgendwo im Weltraum ein absolut starrer Körper Alpha existire, und dass unter der *Bewegung* eines Gegenstandes immer nur seine Ortsveränderung in Bezug auf jenen Körper Alpha zu verstehen sei. Sollte ein solches Princip — sonderbar und befremdlich wie es klingt — denn wirklich durchaus nothwendig sein! Als absolut unentbehrlich dürfte dasselbe für eine *Theorie der Bewegung im Allgemeinen* — nicht zu bezeichnen sein, insofern als auch ohne dasselbe eine solche Theorie als *denkbar* erscheint. Wir müssten dann aber jede Bewegung definiren als eine *relative* Ortsveränderung zweier Punkte gegen einander, und würden alsdann zu einer Theorie gelangen, welche von der Galilei-Newton'schen wesentlich verschieden ist, und deren Uebereinstimmung mit den beobachteten Erscheinungen sehr zweifelhaft sein dürfte. — Wollen wir festhalten an jener *speciellen von Galilei und Newton begründeten Theorie*, so erscheint die Einführung des Körpers Alpha als eine Sache der *Nothwendigkeit*. Wie wollte man sonst das Galilei'sche Trägheitsgesetz definiren! Und wie wollte man *ohne* dieses Gesetz die Theorie zu entwickeln im Stande sein!

Allerdings! Man pflegt den Körper Alpha in der Regel zu ignoriren; man spricht von dem *absoluten* Raum, von der *absoluten* Bewegung. Das dürften nur andere Worte für dieselbe Sache sein. Denn der Charakter, das eigentlich Wesentliche der sogenannten absoluten Bewegung besteht (wie Niemand bestreiten dürfte) darin, dass alle Ortsveränderungen bezogen werden auf *ein und dasselbe* Object, und zwar auf ein Object, welches räumlich ausgedehnt, und unveränderlich, übrigens nicht näher angebbar ist. Nun dieses Object ist es, welches von mir bezeichnet wurde als ein unbekannter *starrer Körper*, bezeichnet wurde als der Körper Alpha.

Aber es erhebt sich die weitere Frage, ob jener Körper

denn eine wirkliche, concrete Existenz besitze gleich der Erde, der Sonne und den übrigen Himmelskörpern. Wir könnten, wie mir scheint, hierauf antworten, dass seine Existenz mit demselben Recht, mit derselben Sicherheit behauptet werden kann wie etwa die Existenz des Licht-Aethers oder die des elektrischen Fluidums.

Treten bei einer rein mathematischen Untersuchung gleichzeitig verschiedene Variable auf, und soll der Zusammenhang zwischen diesen Variablen in übersichtlicher Weise zur Anschauung gebracht werden, so ist es häufig zweckmässig oder selbst nothwendig, eine intermediäre Variable einzuführen, und sodann den Zusammenhang anzugeben, in welchem jede der gegebenen Variablen zu dieser intermediären Grösse steht. — Aehnliches zeigt sich uns in den physikalischen Theorien. Um den Zusammenhang zwischen verschiedenen Phänomenen, die gleichzeitig sich darbieten, zu übersehen, dient häufig die Einführung eines nur gedachten Vorganges, eines nur gedachten Stoffes, welcher gewissermassen ein intermediäres Princip, einen Centralpunkt repräsentirt, um von ihm aus in verschiedenen Richtungen zu den einzelnen Phänomenen zu gelangen. In solcher Weise werden die einzelnen Phänomene mit einander verbunden, indem jedes derselben in Verbindung gesetzt wird mit jenem Centralpunkt. Eine derartige Rolle spielt der Lichtäther in der Theorie der optischen Erscheinungen, und das elektrische Fluidum in der Theorie der elektrischen Erscheinungen; und eine ähnliche Rolle spielt auch jener Körper Alpha in der allgemeinen Theorie der Bewegung.

Ebenso ferner, wie die in einer gegebenen Substanz enthaltenen elektrischen Fluida ihrer Quantität nach *unbestimmt* sind, nämlich (unbeschadet der Theorie) um gleich viel vermehrt oder vermindert werden können; ebenso haftet auch jenem Körper Alpha eine gewisse *Unbestimmtheit* an. Denn ohne Beeinträchtigung der Galilei-Newton'schen Theorie kann derselbe ersetzt werden durch irgend einen *andern* Körper

Alpha, falls nur diesem letztern eine progressive Bewegung zuerkannt wird, die mit Bezug auf den erstern *geradlinig* und *von constanter Geschwindigkeit* ist. Diese Bedingungen allerdings sind nothwendig. Denn die Substitution eines Körpers Alpha, der in Bezug auf den ersten Körper Alpha eine Bewegung *anderer* Art, z. B. eine *rotirende* Bewegung besitzt, würde *völlig unzulässig* sein.[8])

Ebenso endlich, wie die gegenwärtige Theorie der elektrischen Erscheinungen vielleicht dereinst durch eine *andere* Theorie ersetzt, und die Vorstellung des elektrischen Fluidums beseitigt werden könnte; ebenso ist es wohl auch kein Ding der absoluten Unmöglichkeit, dass die Galilei-Newton'sche Theorie dereinst durch eine andere Theorie, durch ein anderes Bild verdrängt, und jener Körper Alpha überflüssig gemacht werde.

Wesentlich Neues dürfte in meinen Expositionen nicht enthalten sein. Vielmehr habe ich mich nur bemüht, die der Galilei-Newton'schen Theorie zu Grunde liegenden Principien, welche mehr durch ihre *Anwendung*, als in *Worten* allgemein anerkannt, allgemein acceptirt sind, zum deutlichen Ausdruck zu bringen. Gleichzeitig hoffe ich, dass meine Expositionen dazu beitragen dürften, um das *Wesen der mathematisch-physikalischen Theorien überhaupt* — in das gehörige Licht zu stellen, um zu zeigen, dass diese Theorien angesehen werden müssen als subjective, aus uns selber entsprungene Gestaltungen, welche (von willkührlich zu wählenden Principien aus, in streng mathematischer Weise entwickelt) ein möglichst treues Bild der Erscheinungen zu liefern bestimmt sind.

Ebenso etwa wie unsere Sehnerven auf alle Reize der Aussenwelt, welcher Art sie auch sein mögen, beständig mit

Lichtempfindungen antworten; in ähnlicher Weise antwortet unser Denkvermögen auf alle im Bereich der unorganischen Natur angestellten Beobachtungen und Wahrnehmungen mit Bildern, die aus Zahlen, Punkten und Bewegungen zusammengesetzt sind. Objective Wirklichkeit oder wenigstens allgemeine Nothwendigkeit würde — wie Helmholtz[9]) mit Recht bemerkt — den Grundlinien eines solchen Bildes, den Principien einer solchen Theorie immer erst dann beizumessen sein, wenn wir nachweisen könnten, dass *diese* Principien die *einzig möglichen* sind, dass neben *dieser* Theorie keine *zweite* denkbar ist, welche den Erscheinungen entspricht. Dass einer derartigen Anforderung zu genügen, ausserhalb der menschlichen Fähigkeiten liegt, bedarf wohl keiner Erläuterung.

So hoch und vollendet also eine Theorie auch dastehen mag, immer werden wir gezwungen sein, von ihren Principien uns aufs Genaueste Rechenschaft abzulegen. Immer werden wir im Auge behalten müssen, dass diese Principien etwas *Willkührliches*, und folglich etwas *Bewegliches*[10]) sind; damit wir wo möglich in jedem Augenblick übersehen können, welche Wirkung eine *Aenderung* dieser Principien auf die ganze Gestaltung der Theorie ausüben würde; und zur rechten Zeit eine solche Aenderung eintreten zu lassen im Stande sind; damit wir (mit einem Wort) die Theorie vor einer *Versteinerung*, vor einer *Erstarrung* zu bewahren im Stande sind, welche *nur verderblich*, für den Fortschritt der Wissenschaft *nur hinderlich* sein kann.

Bemerkungen und Zusätze.

1. (Seite 8). Ein von Huygens (oder Hugens) am 18. November 1690 an Leibniz gerichteter Brief (Leibniz mathematische Schriften, herausgegeben von Gerhardt. Berlin 1850. Erste Abtheilung. II. Band, Seite 57) enthält diejenige Stelle, auf welche mein Vortrag Bezug nimmt. Sie lautet: „Pour ce qui est de la Cause du Reflux que donne Mr. Newton je ne m'en contente nullement, ni de toutes ses autres Theories qu'il bastit sur son principe d'attraction, qui me paroit absurde, ainsi que je l'ay desia temoigné dans l'Addition au Discours de la Pesanteur. Et je me suis souvent etonnè, comment il s'est pu donner la peine de faire tant de recherches de calculs difficiles, qui n'ont pour fondement que ce mesme principe."

2. (Seite 9). Die Worte: „Non necesse est, hypotheses esse veras vel verosimiles; sufficit hoc unum, si calculum observationibus congruentem exhibeant," sind in der bekannten Schrift von Lewes über Aristoteles als *ein Ausspruch von Copernicus* citirt. (Vergl. die deutsche Ausgabe jener Schrift. Leipzig 1865. Seite 93.) Da es nun immerhin angenehm ist, sich auf eine Autorität stützen zu können, so war es eigentlich meine Absicht, mich geradezu auf Copernicus zu berufen. — Als ich aber kurz vor dem Tage des Vortrages das Werk von Copernicus durchblätterte, zeigte sich, dass jene Worte, wenn auch in der Vorrede des Werkes enthalten, doch nicht von Copernicus selber herrühren.

Denn in der Vorrede (Nicolai Copernici de revolutionibus orbium coelestium libri sex. Varsaviae. 1854. Pag. 1) heisst es allerdings: „Neque enim necesse est, eas hypotheses esse veras, imo ne verosimiles quidem, sed sufficit hoc unum, si calculum observationibus congruentem exhibeant."

Mit Bezug hierauf aber befindet sich unter den historischen Notizen über Copernicus (Pag. XXXII der citirten Ausgabe) folgende Bemerkung: „*Prima* operis Copernici editio in hunc modum facta est. Copernicus postquam librum scripsit, diu perpolitum tandem Tidemanno Gysio Episcopo Culmensi sibi amicissimo, qui multis jam annis eum ut ederet hortatus erat, sua voluntate typis excudendum tradidit. Gysius misit Rhetico professori Wittembergensi, qui Norimbergam ad librum in lucem edendum aptissimam judicaverat, et librum typis excudendum curaturos Joannem Schonerum et Andream Osiandrum elegit. Osiander autem, ut videtur, eo consilio usus, ut animi nova doctrina incitati mitigarentur, Copernici praefatione rejecta, ipse pauca, Copernici rationi et sententiae non consentanea, ad lectorem ita praefatus est, ut novam doctrinam tanquam conjecturam proponeret. Quod aegre ferens Gysius, in literis die 26 mensis Julii anni 1543 (i. e. duobus mensibus post Copernici mortem) ad Rheticum datis, malam fidem et editoris et typographi deplorat."

Somit ist es wohl als sicher zu betrachten, dass jene Worte „Neque enim necesse est, hypotheses etc." *nicht* von Copernicus herstammen. Dass indessen Copernicus sich *gegen* dieselben ausgesprochen hätte, dafür dürfte kein Beweis vorliegen. Bekanntlich empfing er ja den Druck seines Werkes erst auf seinem Sterbebett.

Obwohl ich nun in solcher Weise der Stütze einer so gewichtigen Autorität mich beraubt sah, so habe ich doch in meinem Vortrage an jenen Worten festgehalten. Und der Vortrag selber mag zeigen, in welchem Sinne und aus welchen Gründen ich für dieselben einzutreten willens bin.

3. (Seite 11). Diese kurze und einfache Betrachtung über die Bewegung eines fallenden Körpers ist von mir schon angestellt worden in einem früheren Vortrage von im Ganzen ähnlicher Tendenz. (C. Neumann: der gegenwärtige Standpunkt der mathematischen Physik. Tübingen. 1865).

4. (Seite 13). Man vergleiche Leibniz' mathematische Schriften, herausgegeben von Gerhardt. Halle 1860. Zweite Abtheilung. II. Bd. Seite 135.

5. (Seite 14). Die *kreisförmige* Bewegung, welche der Mond besitzt, so lange wir ihn von der Erde aus betrachten, verwandelt sich bekanntlich, sobald wir unsern Standpunkt auf die Sonne verlegen, in eine Bewegung von ganz anderem Charakter, in eine Bewegung, deren Bahn nicht mehr durch eine Kreislinie, sondern durch eine schlangenförmig fortlaufende Linie repräsentirt ist. Und ebenso wird offenbar auch eine mit Bezug auf unsere Erde *geradlinige* Bewegung in eine Bewegung ganz anderer Art, in irgend welche krummlinige Bewegung sich verwandeln, sobald wir wiederum unsern Standpunkt von der Erde nach der Sonne verlegen.

6. (Seite 16). Es bedarf wohl kaum der Bemerkung, dass unter dem starren Körper Alpha ein System starr verbundener *Punkte* zu verstehen ist, und dass die Anzahl dieser Punkte mindestens gleich *drei* sein muss. Ebenso gut könnte der Körper Alpha natürlich auch aufgefasst werden als ein System starr mit einander verbundener *gerader Linien*, deren Anzahl mindestens gleich *zwei* sein müsste.

Dass diese Punkte oder Linien *materiell* sind, ist durchaus unnöthig. So könnte z. B. das System Alpha constituirt sein durch die drei sogenannten Hauptträgheitsaxen irgend eines nicht starren (sondern in seiner Gestaltung sich mit der Zeit ändernden) materiellen Körpers. Ja man könnte (das Bedürfniss nach Einfachheit würde dazu hindrängen) die Behauptung wagen, dass das System Alpha repräsentirt sei durch die *Hauptträgheitsaxen des Weltalls* (nämlich durch die Hauptträgheitsaxen sämmtlicher im Universum enthaltenen Materie). Nur würde leider eine solche Behauptung so gut wie ohne Inhalt sein, insofern keine Möglichkeit vorhanden sein dürfte, sie durch empirische Data sei es zu befestigen, sei es zu erschüttern. (Vergl. den Schluss der Bemerkung 8.).

7. (Seite 19). Von dem Newton'schen Gesetz unterscheidet sich das von mir in der Theorie der Elektrodynamik proponirte Gesetz nur dadurch, dass hier der von dem einen Massenpunkt gegebene Befehl nicht *momentan* zum andern Massenpunkte hingelangt, sondern einer *gewissen Zeit* bedürfen soll, um den Weg vom einen Punkte zum andern zu durchlaufen. (Vergl. die Math. Annalen. Bd. I. Seite 317).

8. (Seite 22). Es mag hier eine Betrachtung ihre Stelle finden, welche sich leicht aufdrängt, und aus welcher deutlich hervorgeht, wie unerträglich die Widersprüche sind, welche sich einstellen, sobald man die Bewegung nicht als etwas Absolutes, sondern nur als etwas Relatives auffasst.

Nehmen wir an, dass unter den Sternen sich einer befinde, der aus *flüssiger* Materie besteht, und der — ebenso etwa wie unsere Erdkugel — in rotirender Bewegung begriffen ist um eine durch seinen Mittelpunkt gehende Axe. In Folge einer solchen Bewegung, infolge der durch sie entstehenden Centrifugalkräfte wird alsdann jener Stern die Form eines abgeplatteten Ellipsoids besitzen. *Welche Form wird* — fragen wir nun — *der Stern annehmen, falls plötzlich alle übrigen Himmelskörper vernichtet (in Nichts verwandelt) würden?*

Jene Centrifugalkräfte hängen nur ab von dem Zustande des Sternes selber; sie sind völlig unabhängig von den übrigen Himmelskörpern. Folglich werden — so lautet unsere Antwort — jene Centrifugalkräfte und die durch sie bedingte ellipsoidische Gestalt ungeändert *fortbestehen,* völlig gleichgültig ob die übrigen Himmelskörper fortexistiren oder plötzlich verschwinden.

Wir können aber, falls die Bewegung als etwas nur *Relatives,* nur als eine *relative* Ortsveränderung zweier Punkte gegeneinander, definirt wird, die vorgelegte Frage noch von einer andern Seite her in Erwägung ziehen, und gelangen alsdann zu einer ganz entgegengesetzten Antwort. Denken wir uns nämlich sämmtliche übrigen Weltkörper vernichtet, so sind jetzt im Universum nur noch diejenigen materiellen Punkte vorhanden, aus denen der Stern selber besteht. Diese aber be-

sitzen *keine* relative Ortsveränderung, befinden sich also (auf Grund der für den Augenblick acceptirten Definition) in *Ruhe*. Folglich wird der Stern — so lautet gegenwärtig unsere Antwort — von dem Augenblick an, wo die übrigen Weltkörper vernichtet sind, sich im Zustande der *Ruhe* befinden, mithin die diesem Zustande entsprechende *Kugel*gestalt annehmen.

Ein so unleidlicher Widerspruch kann nur dadurch vermieden werden, dass man jene Definition, die Bewegung sei etwas *Relatives*, fallen lässt, also nur dadurch, dass man die Bewegung eines materiellen Punktes als etwas *Absolutes* auffasst; wodurch man dann zu jenem Princip des Körpers Alpha hingeleitet wird.

Noch eine Betrachtung ähnlicher Art mag angedeutet werden. Geht man von der Vorstellung aus, die Bewegung wäre etwas *Relatives*, so würde, falls im Universum nur *zwei* materielle Punkte vorhanden sind, die einzig mögliche Bewegung derselben in einer gegenseitigen Annäherung oder Entfernung bestehen. Demnach würde die Richtung dieser Bewegung fortdauernd zusammenfallen mit der Richtung der nach dem Newton'schen Gesetz zwischen den beiden Punkten vorhandenen *Anziehungs*kraft. Hieraus würde folgen, dass die beiden Punkte nothwendiger Weise nach einer gewissen Zeit in einander stürzen, dass also z. B. zwischen Erde und Sonne ein solcher Zusammensturz erfolgen müsste, falls plötzlich alle übrigen Weltkörper *verschwinden*. Sollte diesem Zusammensturz vorgebeugt, und dafür gesorgt werden, dass die Bewegung zwischen Erde und Sonne trotz jenes *Verschwindens* der übrigen Weltkörper ungeändert dieselbe bleibt, so müsste zwischen Erde und Sonne eine gegenseitige Einwirkung supponirt werden, welche nicht mehr dem Newton'schen Gesetz entspricht, sondern vielmehr aus zwei Theilen besteht, aus einer *Anziehung*, umgekehrt proportional mit der zweiten Potenz der Entfernung, und daneben aus einer *Abstossung*, umgekehrt proportional mit der dritten Potenz der Entfernung. Diese Angaben beruhen auf einer neuerdings von

Hesse publicirten Untersuchung. (Hesse. Vorl. über die analyt. Geometrie des Raumes. *Zweite* Aufl. Leipzig. 1869. Seite 442).

Will man also festhalten an der Galilei-Newton'schen Theorie, so ist man, wie aus den eben angestellten Betrachtungen von Neuem hervorgeht, nothwendig gezwungen, den *Begriff der absoluten Bewegung* zu acceptiren, und ebenso auch zu acceptiren das (zu einer deutlichen Definition dieses Begriffes erforderliche) *Princip des starren Körpers Alpha.* Der Körper Alpha mag der Einfachheit willen aufgefasst werden als ein System von drei Linien oder Axen, welche von ein und demselben Punkt ausgehen und aufeinander senkrecht stehen. Die *Bestimmung* dieses Körpers oder Systemes Alpha ist ein Problem, dessen *wirkliche* Lösung nur asymptotisch, nur durch successive Grade der Annäherung erfolgen kann. *Principiell* allerdings ist die Lösung leicht angebbar, nämlich in folgender Weise zu bewerkstelligen.

Es sei n die Anzahl sämmtlicher im Universum enthaltenen materiellen Punkte; ferner seien x, y, z die Coordinaten je eines solchen Punktes in Bezug auf das Axensystem Alpha. Die gegenseitigen Entfernungen der n materiellen Punkte mögen mit r, ihre Entfernungen vom Anfangspunkt des Axensystemes Alpha mit ϱ, endlich die Winkel jener Axen gegen die Linien ϱ mit φ bezeichnet werden. Bei Anwendung der Galilei-Newton'schen Theorie ergeben sich alsdann für die x, y, z, folglich auch für die r, ϱ, φ Ausdrücke, welche abhängig sind von der Zeit, und ausserdem von $7n$ Constanten; letztere bestehen aus $6n$ Integrationsconstanten und aus den n Massen der materiellen Punkte. Die Ausdrücke der Entfernungen r lassen sich in Vergleich bringen mit den empirisch gegebenen Thatsachen, und führen in solcher Weise zur Kenntniss jener $7n$ Constanten. Denkt man sich die Werthe dieser $7n$ Constanten in die für die ϱ, φ gefundenen Ausdrücke substituirt, so erhält man Formeln, durch welche die Lage des Systemes Alpha in Bezug auf die n materiellen

Punkte des Universums für jeden beliebigen Zeitaugenblick angegeben, das gestellte Problem also gelöst wird.

Bei Ausführung der eben genannten Operationen ergiebt sich, dass der *Massenmittelpunkt* (d. i. der sogenannte *Schwerpunkt*) der n materiellen Punkte eine Bewegung besitzt, welche in Bezug auf das Axensystem Alpha geradlinig und von constanter Geschwindigkeit ist. Gleichzeitig zeigt sich, dass die erwähnte Vergleichung der Ausdrücke r mit den empirischen Thatsachen nicht zur *vollständigen* Kenntniss der $7n$ Constanten hinleitet, und dass in Folge dessen dem Systeme Alpha principiell eine *gewisse Unbestimmtheit* anhaftet, darin bestehend, dass ein solches System vertauscht werden kann mit einem *andern* Systeme Alpha, welches in Bezug auf das *erstere* eine geradlinige Bewegung von constanter Geschwindigkeit besitzt. Von dem so gegebenen Spielraum kann Gebrauch gemacht werden zur Vereinfachung der Verhältnisse, indem man den Anfangspunkt des Systemes Alpha zusammenfallen lässt mit jenem Massenmittelpunkt. Nachdem solches ausgeführt, kann nun etwa noch diejenige durch den Massenmittelpunkt, d. i. durch den Anfangspunkt von Alpha gehende Ebene ermittelt werden, für welche die Flächengeschwindigkeit der n materiellen Punkte ein Maximum ist; man gelangt alsdann zu dem *Laplace'schen Theorem*, dass diese Ebene in Bezug auf das System Alpha beständig ein und dieselbe Lage behält.

In unmittelbarem Anschluss an die exponirten Operationen können gleichzeitig auch diejenigen Winkel ϑ berechnet werden, unter welchen die *drei Hauptträgheitsaxen* der n materiellen Punkte gegen die Axen des Systemes Alpha geneigt sind. Die früher (Bemerkung 6.) aufgeworfene Frage würde daher principiell dadurch zu entscheiden sein, dass man untersucht, ob die für die Winkel ϑ sich ergebenden Ausdrücke bei Einsetzung der berechneten $7n$ Constanten Werthe erhalten, welche unabhängig von der Zeit sind. Dass dieselben bei passender Wahl der $7n$ Constanten von der Zeit unabhängig werden *können*, ergiebt sich aus einfachen Ueber-

legungen. Sollen aber die Bedingungen, denen diese Constanten, um einer solchen Anforderung zu entsprechen, Genüge leisten müssen, vollständig hingestellt werden, so bedarf es einer eingehenden Untersuchung, die nicht gerade leicht sein dürfte.

9. (Seite 23). Helmholtz sagt (in seiner Schrift: Ueber die Erhaltung der Kraft. Berlin. 1847. Seite 7): „Das Geschäft der theoretischen Naturwissenschaft wird vollendet sein, wenn einmal die Zurückführung der Erscheinungen auf *einfache Kräfte* vollendet ist, und zugleich nachgewiesen werden kann, dass die gegebene die einzig mögliche Zurückführung sei, welche die Erscheinungen zulassen. Dann wäre dieselbe als die nothwendige Begriffsform der Naturauffassung erwiesen; es würde derselben alsdann also auch objective Wahrheit zuzuschreiben sein."

Allerdings muss ich bemerken, dass ich mich mit diesen Worten des berühmten Physikers und Physiologen nicht völlig in Einklang zu setzen vermag, um so weniger, als daselbst unter *einfachen Kräften* Kräfte von sehr specieller Art verstanden werden, nämlich Kräfte, die nur zwischen je *zwei* materiellen Punkten stattfinden, und ihrer Richtung und Stärke nach nur von der *Entfernung* abhängen sollen. Vollständig in Uebereinstimmung mit den genannten Worten befinde ich mich erst dann, wenn ich darin statt *„einfache Kräfte"* substituire: *„deutlich angebbare Principien."*

10. (Seite 23). Wie ausserordentlich gross der Spielraum ist für die willkührlich zu wählenden Principien, ergiebt sich, wenn man die a priori unnöthigen Beschränkungen aufsucht, die man sich bisher in dieser Beziehung auferlegt hat.

Unnöthig ist es, bei den Principien sich auf Raumgebiete von nur *drei* Dimensionen zu beschränken. (Vergl. Riemann: Die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Göttingen. 1867. Seite 16, 17, 18.) In gleicher Weise erscheint es auch als unnöthig, bei den Principien sich auf die mathematisch-reellen Grössen zu beschränken, und die mathematisch-imaginären Grössen ganz bei Seite zu lassen.

Unnöthig ist es ferner, was den Begriff der *Abhängigkeit* anbelangt, sich auf *einen* oder *zwei* Zeitpunkte zu beschränken. Man könnte denselben ebenso gut auch eintreten lassen mit Bezug auf *drei* Zeitpunkte, oder auch mit Bezug auf ein *Continuum* von Zeitpunkten. Genauer betrachtet, tritt uns übrigens eine solche Ausdehnung des genannten Begriffes bereits entgegen in W. Weber's elektrodynamischem Grundgesetz, demzufolge die zwischen zwei elektrischen Punkten stattfindende Kraft durch Geschwindigkeit und Beschleunigung bedingt ist.

Unnöthig ist es endlich, was den Begriff der *Abhängigkeit* betrifft, sich auf nur *zwei* materielle Punkte zu beschränken. Ich erinnere in dieser Beziehung an die ternären, quaternären, überhaupt multiplen Kräfte, welche Fechner an Stelle der binären Kräfte, oder vielmehr *neben* denselben in Vorschlag gebracht hat. (Fechner: Die physikalische und philosophische Atomenlehre. Zweite Aufl. Leipzig. 1864. Seite 196 bis 221.)

Diese Beispiele schon zeigen, dass das Gebiet abstracter Untersuchungen, welches sich hier dem Mathematiker darbiebietet, ein unendliches ist. Und so schwierig es auch sein mag, in einem solchen Labyrinth sich nicht zu verlieren, so werden doch Untersuchungen dieser Art, in *planmässiger Weise* und mit *rigoröser Strenge* angestellt, von grossem Vortheil und vielleicht sogar nothwendig sein können, falls der Fortschritt der Naturwissenschaft nicht durch Beschränktheit der Begriffe gehindert, durch überlieferte Vorurtheile gehemmt werden soll. (Vergl. Riemann: Die Hypothesen der Geometrie. Göttingen. 1867. Seite 18.) Hat doch Laplace mit vollem Recht bemerkt, dass Kepler niemals seine berühmten Gesetze entdeckt haben würde, wenn er nicht den Weg *schon gebahnt* gefunden hätte durch die abstracten Untersuchungen der alten Griechischen Mathematiker!